Colle du 18/03 - Sujet 1
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P$.

Exercice 1. Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $F = \{\, f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \,\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\operatorname{ch}, \operatorname{ch}', \operatorname{ch}'', \operatorname{ch}'''\right)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer une base de G.
3. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Montrer que P divise $X^{n+1} - 1$ et déterminer $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^{n+1} - 1 = PQ$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$.

Colle du 18/03 - Sujet 2
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
2. Caractériser la multiplicité d'une racine par les dérivées.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^n - 1$, $S_n = nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)\,X^n$.

1. Déterminer le quotient de P_n par $(X-1)$.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par $(X-1)$.
3. Vérifier que S_n est divisible par 1 puis en calculant de deux façons la dérivée de P_{n+1}, déterminer le quotient de S_n par $(X-1)$.
4. Conclure sur le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par $(X-1)^2$.

Exercice 2. Soient $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \right\}$ et $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer un supplémentaire.

Colle du 18/03 - Sujet 3
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Enoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
2. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \left(X^2 - 1\right)^n$.

1. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les coefficients de P.
3. Calculer $P^{(n)}$ de deux manières différentes.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et A et B deux familles de vecteurs de E ayant au moins un élément en commun. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(A \cap B) \subseteq \mathrm{Vect}\,(A) \cap \mathrm{Vect}\,(B)$. Discuter de la réciproque.